LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E À GESTÃO

ÁLGEBRA LINEAR

DATA: 5 / Janeiro / 2017 Duração: 2 horas

Apresente todos os cálculos e justifique detalhadamente todas as respostas

(25) **1.** Discuta o seguinte sistema linear em função dos valores de α e $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 = \beta \\ x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Considere $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(20) **a)** Determine os valores de α para os quais o espaço das linhas de A_α é $\mathbb{R}^3$.

b) Considere $\alpha = 0$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f(\mathbf{u}) = A_0 \mathbf{u} \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

(25) **b1)** Apresente uma condição necessária e suficiente para que a aplicação f seja injetiva e investigue se essa condição é verificada.

(30) **b2)** Defina imagem de uma aplicação linear. Apresente a imagem da aplicação f e uma base para ela.

(25) **c)** Apresente a expressão da forma quadrática $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A_\alpha \mathbf{x}$, com $\alpha = 1$, e classifique a forma.

3. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

(30) **a)** Determine os valores próprios de M. A matriz é diagonalizável? Porquê?

(15) **b)** Determine o subespaço próprio associado ao maior valor próprio de M.

(30) **4.** Prove que se A é uma matriz quadrada de ordem n diagonalizável e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = \mathbf{0}_{n\times n}$ então $A = \mathbf{0}_{n\times n}$.